Csatornakapacitás meghatározás (zajmentes, additív költség)

Bucsay Balázs

2009. április 22.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **2**

2. Alap fogalmak **3**

3. Csatornakapacitás kiszámítása **5**

4. Csatornakapacitás kiszámítása iteratív algoritmussal (pszeudo) **8**

5. Program használat **9**

1. fejezet

Bevezető

A csatornakapacitás kiszámításához be kell vezetni pár dolgot. Ha A kommunikálni akar B-vel akkor egy kódolásra illetve dekódolásra, és egy csatornára lesz szükség. A kommunikáció csak akkor mondható sikeresnek, ha A és B megegyezik abban, hogy a küldött információ egyezik, vagyis teljes volt közlés.

1.1. ábra. Kommunikáció folyamata

A következőkben a csatorna a következőkre választott:

- zajmentes
- emlékezetnélküli
- diszkrét
- additív költségű

A csatornakapcitás a csatorna áteresztőképességét jellemzi. Az áteresztőképesség egy mérték, ami meghatározza hogy adott költséggel mennyi közlemény vihető át rajta.

2. fejezet

Alap fogalmak

Legyen $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$ a csatornaábécé, amihez tartozó költségeket $T = \{t_1, \ldots, t_s\}$-el jelöljük. A csatornánk diszkrét, mert előre meghatározott, kiválasztott jeleket továbbítunk a megadott szisztéma szerint rajta és additív költségű, mivel a kódjelek átviteli költsége nem feltétlen egyezik meg. Additív költséget akár nem azonos átviteli időnek is nevezhetjük, hiszen az átviteli idő hossza költségként is tekinthető. A költségek pozitív értékek, hiszen negatív átviteli idő nem értelmezhető. 0 költségekkel, több mint 1betűvel a csatornakapacitás végtelen lenne. [1]

Legyen $Q = \{q_1, \ldots, q_s\}$ a csatornaábécé betűinek eloszlása. A továbbiak ezen értékek megválasztásával foglalkozunk, hogy a csatornakapcitás a maximumot érje el.

2.0.1. Definíció (Zajmentes csatorna)**.** A kódjelsorozatok (küldött üzenetek) sosem változnak meg a kommunikáció során, vagyis a csatorna zajmentes.

2.0.2. Definíció (Emlékezetnélküli csatorna)**.** A csatorna emlékezetnélkülinek mondható, ha a kimeneti eloszlás valószínűsége csak a bemenettől függ és független az összes előző kimenettől vagy bemenettől.

2.0.3. Definíció (Csatornakapacitás)**.** A csatornakapacitását a következőként definiáljuk diszkrét, emlékezetnélküli csatornánál:

$$C = \max_{Q} I(X, Y)$$

A definiálás lényege, hogy a X a forrás valószínűségi változója, Y pedig a nyelő, a kimenetéé. A $I(X, Y)$ kölcsönös információ mennyiség a két valószínűségi változó különbségét adja. A legkisebb különbséggel járó hiba a legnagyobb csatornakapacitást adja.

2.0.4. Definíció (Egyedi információsmennyiség)**.** Az

$$I(X = x) = log_2 \frac{1}{P(X = x)}$$

mennyiséget az X valószínűségi változó x értéke által tartalmazott egyedi ifnormációmennyiségnek nevezzük.

2.0.5. Definíció (Shannon-féle entrópia)**.** Az $P = p_1, p_2, \ldots, p_n$ eloszlású X valószínűségi változó Shannon-féle entrópiáján a következőt értjük:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i log_2 p_i$$

2.0.6. Állítás. Kölcsönös információs mennyiség:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} log_2 \frac{p_{ij}}{q_i r_j} = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

3. fejezet

Csatornakapacitás kiszámítása

Ha a csatornaüzenet hossza N, akkor y_i várhatóan Nq_i-szer fog előfordulni az üzenetben. Így

$$-Nq_iI(y_i) = -Nq_i \log_2 q_i$$

mennyiségű információt továbbít a nyelőhöz. Ugyanez minden y_i-re a csatornaábácéből: [2]

$$-\sum_{i=1}^{s} Nq_i \log_2 q_i = \sum_{i=1}^{s} Nq_i \log_2 \frac{1}{q_i} = NH(Q)$$

Hasonlóan kiszámítható a várható költség is:

$$\sum_{i=1}^{s} Nq_it_i = N\sum_{i=1}^{s} q_it_i$$

Ebből számmaztatható az egy betűre jutó költség:

$$\tau = \sum_{i=1}^{s} t_iq_i$$

3.0.7. Definíció (Információtovábbítás átlag sebessége)**.** A következő mennyiséget nevezzük az információtovábbítás átlagos sebességének:

$$v(Q) = \frac{H(Q)}{\tau}$$

3.0.1. Tétel. *A csatornakapacitáshoz szükséges Q eloszlás a következő az esetünkben (zajmentes, emlékezetnélküli, diszkrét):*

$$q_i = 2^{-Ct_i} \quad (i = 1..s)$$

mert a

$$\sum_{i=1}^{s} 2^{-vt_i} = 1$$

egyenlet egyetlen megoldása a: $v = C \geq 0$

Bizonyítás. Az információtovábbítás átlag sebességét felírva a következő teljesül:

$$v(Q) = \frac{H(Q)}{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{s} q_i \log_2 \frac{1}{q_i}}{\sum_{i=1}^{s} q_i t_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{s} q_i \log_2 \frac{1}{2^{Ct_i}}}{\sum_{i=1}^{s} q_i t_i} = \frac{\sum_{i=1}^{s} q_i C t_i}{\sum_{i=1}^{s} q_i t_i} = C$$

Az egyenlőség csak $q_i = 2^{-Ct_i} \quad (i = 1..s)$ esetben teljesül.

A végső lépés az egyértelmű belátása C létezésének.

$$f(v) = \sum_{i=1}^{s} 2^{-vt_i}$$

a függvény szigorúan monoton csökkenő, és

$$f(0) = s \geq 2, \quad \lim_{v \to +\infty} f(v) = 0$$

folytonosság és a szigorú monotonitás miatt létezik $v = C$, $f(C) = 1$. □

A maximális csatornakapacitás kiszámításához a csatornaábécé betűinek megfelelő eloszlást kell megtalálni. A következő egyenletek birtokában:

$$q_i = 2^{-Ct_i} \quad (i = 1..s)$$

és

$$\sum_{i=1}^{s} 2^{-vt_i} = 1$$

kifejezhető a következő:

$$\sum_{i=1}^{s} 2^{-vt_i} = 1 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{s} e^{\ln(2^{-vt_i})} = 1 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{s} e^{-t_i v \ln 2} = 1$$

$$u = v \ln 2$$

Azaz:

$$\sum_{i=1}^{s} e^{-t_i u} = 1 \quad \rightarrow \quad \ln(g(u)) = f(u) = 0$$

A megoldáshoz egy numerikus iteratív algoritmust választunk, pl a Newton-módszert. Ez a módszer minden lépésben egyre jobban megközelíti az egzakt megoldást, amit keresünk. Az algoritmus befejezéséhez egy termináló feltételt is be kell vezetnünk. A módszer lényege, hogy a függvény deriváltját használja fel a következő érték becsléséhez, így közelebb kerülve az egzakt eredményhez. Ha a termináló feltétel teljesül, akkor a feltételnek megfelelően elég közel kerültünk a megoldáshoz.

A módszernek megfelelő közelítő függvény:

$$f'(u_k)(u - u_k) + f(u_k) = 0$$

Azaz:

$$u = u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}$$

f függvény deriváltja:

$$f'(u) = \frac{g'(u)}{g(u)}$$

módszer iterációs alakja:

$$u_{k+1} = u_k - \frac{g(u_k)\ln g(u_k)}{g'(u_k)}$$

Termináló feltétel:

$$u_{k-1} - u_k > \varepsilon$$

Végcél a csatornaábécéhez betűihez tartozó eloszlás meghatározása:

$$q_i = e^{-ut_i} \quad (i = 1..s)$$

4. fejezet

Csatornakapacitás kiszámítása iteratív algoritmussal (pszeudo)

Newton-modszer(t, s) *[T - költségek halmaza, s költségek száma]*

$k \leftarrow 0$, $\varepsilon \leftarrow 10^{-6}\, u_0 \leftarrow 0$

DO

    $u_{k+1} \leftarrow u_k - \frac{g(u_k,t,s) lng(u_k,t,s)}{g'(u_k,t,s)}$

    $k \leftarrow k + 1$

WHILE $u_k - u_{k-1} > \varepsilon$

$u \leftarrow u_k$

FOR $k \leftarrow 0$ **TO** s **DO**

    $Q_k \leftarrow e^{-ut_k}$

ENDFOR

4.1. ábra. Newton módszer iteratív algoritmusa

5. fejezet

Program használat

A mellékelt programok használati útmutatója: Windows alatt, szükséges a binárisok könyvtárában egy konzolt *cmd* paranccsal nyitni, majd a *generateweight.exe* filet elindítani a következő paraméterezéssel:

generateweight.exe [költségek száma] [költségek maximuma]

A generált költségek az *example.txt* fileba kerülnek, amit a *channelcapacity.exe* biránissal tudunk beolvastatni a következő módon:

channelcapacity.exe example.txt

Unix: A feljebb írtakkal egyezik a futtatás menete, fordítás:

```
# gcc channelcapacity.c -lm -o channelcapacity
# gcc generateweight.c -lm -o generateweight
```

Irodalomjegyzék

[1] Csiszár Imre, Fritz József: *Információelmélet*, Tankönyvkiadó , Budapest, 1986.

[2] Fegyverneki Sándor: *Információelmélet Összefoglaló segédlet* Miskolci Egyetem, 2002.